Fonctions de Legendre sur une Algèbre de Jordan

en hommage à Tom Koornwinder

Jacques Faraut
Analyse complexe et Géométrie
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu, 75 252 Paris cedex 05, France
email: jaf@ccr.jussieu.fr

Dans cette note nous proposons une définition des fonctions de Legendre sur une algèbre de Jordan. Les fonctions sphériques du demi-plan de Poincaré s'expriment à l'aide des fonctions de Legendre classiques. Par analogie on peut définir les fonctions de Legendre généralisées sur une algèbre de Jordan à partir des fonctions sphériques d'un domaine hermitien symétrique de type tube. Ceci n'a rien d'original puisque c'est un point de vue maintenant classique. Cependant l'introduction des algèbres de Jordan a ceci d'interessant qu'elle permet d'écrire des formules qui ressemblent beaucoup aux formules que l'on connait dans le cas des fonctions de Legendre d'une variable.

1. Fonctions de Legendre et fonctions sphériques du demi-plan de Poincaré

Le groupe $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ opère sur le demi-plan de Poincaré,

$$\{z = x + iy \mid y > 0\},$$

par les transformations homographiques

$$z \mapsto Z = g(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si $Z = X + iY$, alors

$$Y = \frac{y}{|cz+d|^2},$$

et si $z = iy$ ($x = 0$),

$$Y = (c^2 y + d^2 y^{-1})^{-1}.$$

Le demi-plan de Poincaré s'identifie ainsi à l'espace quotient G/K, où $K = \mathrm{SO}(2)$. La fonction $p_s(z) = y^{-s}$, $s \in \mathbb{C}$, est une fonction propre du laplacien hyperbolique,

$$\Delta p_s = s(s+1)p_s,$$

et la fonction Ψ_s définie par

$$\Psi_s(z) = \int_K p_s\big(k(z)\big)dk,$$

est une fonction sphérique de la paire (G, K). Un élément de K peut s'écrire

$$k = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix},$$

et par suite

$$\Psi_s(iy) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^2\frac{\theta}{2}y + \cos^2\frac{\theta}{2}y^{-1})^s d\theta.$$

On vérifie facilement que

$$\Psi_s(iy) = \Psi_s(iy^{-1}).$$

Cette fonction s'exprime à l'aide de la fonction de Legendre P_s, en effet

$$\Psi_s(iy) = P_s\big(\frac{1}{2}(y + y^{-1})\big).$$

Pour $\Re s \geq 0$,

$$\Psi_s(iy) \sim \gamma(s)y^s, \quad y \to \infty,$$

avec

$$\gamma(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\frac{\theta}{2})^{2s}d\theta.$$

En posant $u = \mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}$ on obtient

$$\gamma(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1+u^2)^{-s-1}du = \frac{1}{\pi}B(s+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),$$

où $B(p,q)$ désigne la fonction beta d'Euler.

Dans cette note nous allons généraliser ces résultats au cas des espaces hermitiens symétriques de type tube.

2. Fonctions sphériques sur un cône symétrique

Soit Ω un cône convexe ouvert dans un espace vectoriel euclidien V de dimension n. On suppose que Ω est propre, c'est à dire, $\bar{\Omega} \cap -\bar{\Omega} = \{0\}$. Soit $G(\Omega)$ le groupe des transformations linéaires qui préservent Ω,

$$G(\Omega) = \{g \in GL(V) \mid g\Omega = \Omega\}.$$

Le cône Ω est dit *homogène* si $G(\Omega)$ opère transitivement sur Ω. Le cône ouvert dual Ω^* est défini par

$$\Omega^* = \{x \in V \mid \forall y \in \bar{\Omega} \setminus \{0\},\ (x|y) > 0\}.$$

Le cône Ω est dit *autodual* si $\Omega = \Omega^*$. S'il est homogène et autodual, le cône Ω est dit *symétrique.*

Une *algèbre de Jordan euclidienne* est un espace vectoriel euclidien V muni d'un produit vérifiant

$$\begin{array}{ll} (1) & xy = yx, \\ (2) & x(x^2y) = x^2(xy), \\ (3) & (xy|z) = (y|xz). \end{array}$$

On note $L(x)$ l'endomorphisme défini par

$$L(x)y = xy.$$

La propriété (2) signifie que $L(x)$ et $L(x^2)$ commutent, et la propriété (3) que $L(x)$ est autoadjoint.

On montre que l'ensemble des carrés d'une algèbre de Jordan euclidienne,

$$Q = \{x^2 \mid x \in V\},$$

est un cône convexe fermé et que son intérieur Ω est un cône symétrique. De plus Koecher et Vinberg ont montré que tout cône symétrique peut être obtenu de cette façon ([7,12]).

Par exemple si $V = \mathrm{Sym}(m, \mathbb{R})$ est l'espace des matrices symétriques réelles $m \times m$ muni du produit de Jordan,

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx),$$

alors V est une algèbre de Jordan euclidienne relativement au produit scalaire défini par

$$(x|y) = \mathrm{tr}(xy),$$

et le cône symétrique Ω est le cône des matrices symétriques définies positives.

Notons $P(x)$ l'endomorphisme autoadjoint de V défini par

$$P(x) = 2L(x)^2 - L(x^2).$$

Si $V = \mathrm{Sym}(m, \mathbb{R})$, $P(x)y = xyx$. Pour x dans Ω, $P(x)$ est défini positif. Considérons sur Ω la structure riemannienne invariante définie par

$$G_x(u, v) = (P(x^{-1})u|v),\ x \in \Omega,\ u, v \in V.$$

Cette structure riemannienne est invariante par $G(\Omega)$, et fait de Ω un espace riemannien symétrique qui s'identifie à l'espace quotient G_0/K_0 où G_0 est la composante connexe neutre de $G(\Omega)$, et

$$K_0 = \{g \in G_0 \mid ge = e\},$$

e désignant l'élément neutre de V.

Pour ce qui concerne la géométrie et l'analyse des cônes symétriques on peut consulter [2].

Nous supposerons que l'algèbre de Jordan V est simple, c'est à dire qu'elle n'as pas d'idéal non trivial. Soit r le rang de V et soit $\{c_1, \ldots, c_r\}$ un système complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux. Tout élément x de V s'écrit

$$x = k\sum_{j=1}^{r} \lambda_j c_j, \ k \in K_0, \ \lambda_j \in \mathbb{R}.$$

Le déterminant Δ est défini par $\Delta(x) = \prod \lambda_j$, et la trace par $\mathrm{tr}(x) = \sum \lambda_j$. Δ est un polynôme homogène de degré r, et on peut supposer que le produit scalaire est défini par $(x|y) = \mathrm{tr}(xy)$. Si c est un idempotent, l'espace

$$V(c, 1) = \{x \in V \mid cx = x\}$$

est une sous-algèbre de V, et pour $1 \leq j \leq r$,

$$V_j = V(c_1 + \cdots + c_j, 1)$$

est une sous-algèbre de V de rang j. Le déterminant mineur principal Δ_j est défini par

$$\Delta_j(x) = \Delta_{V_j}(x^{(j)}),$$

où Δ_{V_j} désigne le déterminant relatif à la sous-algèbre V_j, et $x^{(j)}$ est la projection orthogonale de x sur V_j. Les mineurs principaux sont positifs sur Ω. Pour $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbf{C}^r$, et pour $x \in \Omega$, on pose

$$\Delta_{\mathbf{s}}(x) = \Delta_1(x)^{s_1 - s_2}\Delta_2(x)^{s_2 - s_3} \ldots \Delta_r(x)^{s_r}.$$

La fonction $\Delta_{\mathbf{s}}$ est fonction propre des opérateurs différentiels invariants sur Ω, et les fonctions sphériques $\Phi_{\mathbf{s}}$ du cône symétrique $\Omega = G_0/K_0$ sont données par la représentation intégrale suivante

$$\Phi_{\mathbf{s}}(x) = \int_{K_0} \Delta_{\mathbf{s}}(kx)dk.$$

Si $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r)$ où les nombres m_j sont des entiers vérifiant $m_1 \geq \cdots \geq m_r \geq 0$, la fonction sphérique $\Phi_{\mathbf{m}}$ est un polynôme. Ces polynômes, appelés polynômes sphériques, s'expriment à l'aide des polynômes de Jack. Si $x = k\sum_{j=1}^{r} \lambda_j c_j$ ($k \in K_0$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$),

$$\Phi_{\mathbf{m}}(x) = \frac{J_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)}{J_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}(1, \ldots, 1)},$$

avec $\alpha = \frac{2}{d}$, et $J_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}$ est le polynôme de Jack d'indice α associé à la partition définie par $\mathbf{m}$.

3. Fonctions sphériques sur un domaine hermitien symétrique de type tube

Comme dans la Section 2, soit Ω le cône symétrique associé à une algèbre de Jordan euclidienne V, et soit T_Ω le tube dans l'espace complexifié $V^{\mathbb{C}}$ de base Ω,

$$T_\Omega = V + i\Omega = \{z = x + iy \mid x \in V,\ y \in \Omega\}.$$

Soit G le groupe des transformations holomorphes de T_Ω. Il est engendré par les transformations

$$z \mapsto gz + a,$$

avec $g \in G(\Omega)$, $a \in V$, et par la "symétrie" s,

$$s(z) = -z^{-1}.$$

Le domaine T_Ω, muni de la métrique de Bergman, est un espace hermitien symétrique, $T_\Omega \simeq G/K$, où

$$K = \{g \in G \mid g(ie) = ie\}.$$

La transformation de Cayley établit un isomorphisme holomorphe du tube T_Ω sur un domaine borné D. Définissons les applications p et c par

$$\begin{aligned} p(z) &= (z - ie)(z + ie)^{-1}, \\ rc(w) &= i(e + w)(e - w)^{-1}. \end{aligned}$$

Si $z \in T_\Omega$, alors $z + ie$ est inversible, et p est bien définie sur T_Ω. L'ensemble $D = p(T_\Omega)$ est un domaine convexe borné, et la transformation de Cayley c est un isomorphisme holomorphe de D sur T_Ω, d'inverse p. Pour décrire D introduisons la notation

$$x \,\square\, y = L(xy) + [L(x), L(y)],$$

nous avons alors

$$D = \{w \in V^{\mathbb{C}} \mid I - w \,\square\, \bar{w} >> 0\}.$$

La frontière de Shilov Σ de D est l'ensemble

$$\Sigma = \{z \in V^{\mathbb{C}} \mid z^{-1} = \bar{z}\}.$$

Le groupe $K_1 = c^{-1}Kc$ est un sous-groupe de $GL(V^{\mathbb{C}})$ qui opère transitivement sur Σ, et $\Sigma \simeq K_1/\tilde{K}_0$, où $\tilde{K}_0$ est un revêtement fini de K_0. L'image $p(V)$ de V par l'application p est un ouvert dense de Σ,

$$p(V) = \{z \in \Sigma \mid \Delta(e - z) \neq 0\}.$$

La fonction $p_{\mathbf{s}}$ ($\mathbf{s} \in \mathbb{C}^r$) définie sur T_Ω par

$$p_s(z) = \Delta_{\mathbf{s}}(y^{-1}),$$

est fonction propre des opérateurs différentiels invariants sur l'espace hermitien symétrique T_Ω, et les fonctions sphériques $\Psi_{\mathbf{s}}$ de $T_\Omega \simeq G/K$ sont données par la représentation intégrale

$$\Psi_{\mathbf{s}}(z) = \int_K p_{\mathbf{s}}(k^{-1}(z))dk.$$

Les fonctions sphériques $\Phi_{\mathbf{s}}$ sont invariantes par $\tilde{K}_0$, par suite

$$\int_{\tilde{K}_0} p_{\mathbf{s}}(k_0(iy))dk_0 = \Phi_{\mathbf{s}}(y^{-1}),$$

et

$$\Psi_{\mathbf{s}}(z) = \int_{K/\tilde{K}_0} \Phi_{\mathbf{s}}\big(\Im(\dot{k}^{-1}(z))^{-1}\big)d\dot{k}.$$

Ainsi la fonction $\Psi_{\mathbf{s}}$ s'exprime à l'aide d'une intégrale sur Σ. Pour $\sigma \in \Sigma$, la transformation $P(\sigma)$ est un élément du groupe K_1. Soit k l'élément correspondant du groupe K, $k = c \circ P(\sigma) \circ c^{-1}$.

LEMME 1. *Supposons* $\Delta(e - \sigma^2) \neq 0$. *Alors*

$$k(z) = -a - P(b)(z-a)^{-1},$$

avec

$$\begin{aligned} a &= c(\bar\sigma^2) = i(\sigma + \bar\sigma)(\sigma - \bar\sigma)^{-1}, \\ b &= 2i(\sigma - \bar\sigma)^{-1}. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Posons

$$\begin{aligned} w &= c^{-1}(z), \\ Z &= k(z) = c\big(P(\sigma)w\big). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} Z &= -ie + 2i\big(e - P(\sigma)w\big)^{-1} \\ &= -ie + 2iP(\bar\sigma)\big(\bar\sigma^2 - w\big)^{-1} \\ &= -ie - P(\bar\sigma)\big((a+ie)^{-1} - (z+ie)^{-1}\big). \end{aligned}$$

En utilisant l'identité de Hua

$$u^{-1} - v^{-1} = \big(u + P(u)(v-u)\big)^{-1},$$

nous obtenons

$$Z = -ie - P(\bar\sigma)\big((a+ie) + P(a+ie)(z-a)^{-1}\big).$$

D'autre part

$$\begin{aligned} &ie + P(\bar\sigma)(a+ie) = a, \\ &P(\bar\sigma)P(a+ie) = P\big(\bar\sigma(a+ie)\big) = P(b). \end{aligned}$$

□

LEMME 2. *Pour* $x + iy \in T_\Omega$,

$$-\Im(x+iy)^{-1} = \big(y + P(x)y^{-1}\big)^{-1}.$$

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que $x = e$,

$$-\Im(e+iy)^{-1} = y(e+y^2)^{-1} = (y+y^{-1})^{-1}.$$

Supposons maintenant que $x \in \Omega$,

$$x + iy = P(x^{\frac{1}{2}})\big(e + iP(x^{-\frac{1}{2}})y\big),$$

et

$$\begin{aligned} -\Im(x+iy)^{-1} &= P(x^{-\frac{1}{2}})\big(P(x^{-\frac{1}{2}})y + P(x^{\frac{1}{2}})y^{-1}\big)^{-1} \\ &= \big(y + P(x)y^{-1}\big)^{-1}. \end{aligned}$$

Les deux membres de l'égalité à démontrer sont des fonctions rationnelles qui sont égales pour $x \in \Omega$, elles sont donc égales pour tout x de V. □

LEMME 3. *Pour* $z = iy$, $Z = X + iY = k(iy)$,

$$Y = \big(P(\alpha)y + P(\beta)y^{-1}\big)^{-1},$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2i}(\sigma - \bar\sigma),\ \beta = \frac{1}{2}(\sigma + \bar\sigma).$$

DÉMONSTRATION. D'après le Lemme 1,

$$Z = X + iY = -a - P(b)(iy - a)^{-1},$$

et le résultat annoncé se déduit du Lemme 2. □

Du Lemme 3 on déduit la formule de représentation intégrale suivante de la fonction sphérique $\Psi_{\mathbf{s}}$

THÉORÈME 1

$$\Psi_{\mathbf{s}}(iy) = \int_\Sigma \Phi_{\mathbf{s}}\big(P(\alpha)y + P(\beta)y^{-1}\big)d\sigma,$$

avec $\sigma = (\alpha + i\beta)^2$.

Cette formule est l'analogue de la représentation intégrale des fonctions de Legendre, et peut servir à définir les fonctions de Legendre généralisées $P_{\mathbf{s}}$ sur une algèbre de Jordan,

$$\Psi_{\mathbf{s}}(iy) = P_{\mathbf{s}}\big(\frac{1}{2}(y + y^{-1})\big).$$

Si $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r)$, où les nombres m_j sont des entiers vérifiant $m_1 \geq \cdots \geq m_r \geq 0$, la fonction de Legendre $P_{\mathbf{m}}$ est un polynôme qu'on peut appeler polynôme de Legendre généralisé.

Soit
$$D_{\mathbb{R}} = D \cap V = (-e + \Omega) \cap (e - \Omega).$$
Notons $L^2(D_{\mathbb{R}})$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur $D_{\mathbb{R}}$ pour la mesure de Lebesgue, et $L^2(D_{\mathbb{R}})^\natural$ le sous-espace des fonctions K_0-invariantes. On peut montrer que les polynômes de Legendre généralisés $P_{\mathbf{m}}$ constituent une base orthogonale de $L^2(D_{\mathbb{R}})^\natural$. Si $x = k \sum \lambda_j c_j$ est la décomposition spectrale de x, $P_{\mathbf{m}}(x) = p_{\mathbf{m}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, où $p_{\mathbf{m}}$ est un polynôme symétrique de r variables. Soit
$$I = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \mid -1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_r < 1\}.$$
Les polynômes $p_{\mathbf{m}}$ constituent une base ortogonale de l'espace des fonctions de carré intégrables sur I par rapport au poids
$$w(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) = \prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i)^d.$$

Les travaux concernant les polynômes de Legendre et de Jacobi généralisés sont nombreux. Sans prétendre être exhaustif nous pouvons citer [1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10].

Lorsque $\mathbf{s} = (\alpha, \ldots, \alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{C})$, la fonction de Legendre s'exprime à l'aide de la fonction hypergéométrique généralisée ${}_2F_1$. En effet d'après la Proposition XV.3.7 de [2],
$$\Psi_{\mathbf{s}}(iy) = \Delta(e - \xi^2)^{-\alpha} {}_2F_1(-\alpha, -\alpha; \frac{n}{r}; \xi^2),$$
avec $\xi = (y - e)(y + e)^{-1}$, ce qui peut s'écrire, en utilisant la Proposition XV.3.4,
$$P_{\mathbf{s}}(x) = {}_2F_1(-\alpha, \alpha + \frac{n}{r}; \frac{n}{r}; \frac{e - x}{2}).$$

4. Comportement asymptotique

Pour $\Re s_1 \geq \Re s_2 \geq \cdots \geq \Re s_r \geq 0$,
$$\Psi_{\mathbf{s}}(iy) \sim \int_\Sigma \Phi_{\mathbf{s}}\big(P(\alpha)y\big) d\sigma,$$
c'est à dire que, si t est un nombre réel positif,
$$\lim_{t \to \infty} t^{-|\mathbf{s}|} \Psi_{\mathbf{s}}(ity) = \int_\Sigma \Phi_{\mathbf{s}}\big(P(\alpha)y\big) d\sigma,$$
où $|\mathbf{s}| = s_1 + \cdots + s_r$. En utilisant la relation fonctionnelle vérifiée par la fonction sphérique $\Phi_{\mathbf{s}}$ on obtient
$$\int_\Sigma \Phi_{\mathbf{s}}\big(P(\alpha)y\big) d\sigma = \Phi_{\mathbf{s}}(\alpha^2) \Phi_{\mathbf{s}}(y).$$

Si bien que

$$\Psi_{\mathbf{s}}(iy) \sim \gamma(\mathbf{s})\Phi_{\mathbf{s}}(y),$$

avec

$$\gamma(\mathbf{s}) = \int_\Sigma \Phi_{\mathbf{s}}(\alpha^2)d\sigma.$$

Pour calculer $\gamma(\mathbf{s})$ nous allons l'exprimer comme une intégrale sur V à l'aide de la transformation de Cayley. En posant

$$\sigma = (e-u)(e+u)^{-1}, \; u \in V,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \tfrac{1}{4}(2e + \sigma + \bar{\sigma}) = (e+u^2)^{-1}, \\ d\sigma &= 2^n \Delta(e+u^2)^{-\frac{n}{r}} du, \end{aligned}$$

d'où

$$\gamma(\mathbf{s}) = 2^n \int_V \Phi_{\mathbf{s}}\big((e+u^2)^{-1}\big)\Delta(e+u^2)^{-\frac{n}{r}} du,$$

Ce qui peut aussi s'écrire

$$\gamma(\mathbf{s}) = 2^n \int_V \Delta_{-\mathbf{s}^* - \frac{n}{r}}(e+u^2)du,$$

avec $\mathbf{s}^* = (s_r, \dots, s_1)$.

THÉORÈME 2. *La fonction $\gamma(\mathbf{s})$ s'exprime à l'aide de la fonction beta d'Euler,*

$$\gamma(\mathbf{s}) = C \prod_{j=1}^{r} B(\lambda_j, \frac{1}{2}) \prod_{j<k} B(\lambda_j + \lambda_k, \frac{d}{2}),$$

avec $\mathbf{s} = \lambda - \rho$, $\rho_j = \frac{d}{4}(2j - r - 1) + \frac{n}{2r}$.

DÉMONSTRATION. Nous allons calculer $\gamma(\mathbf{s})$ par récurrence sur le rang r selon une méthode due à HUA [5], Theorem 2.1.1. Posons

$$I_r(\mathbf{s}) = \int_V \Delta_{-\mathbf{s}}(e+x^2)dx.$$

Considérons la décomposition de Peirce de V relativement à l'idempotent c_r,

$$\begin{aligned} V &= V(c_r, 1) + V(c_r, \tfrac{1}{2}) + V(c_r, 0), \\ x &= tc_r + \xi + x_0, \; t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Soit ϕ la représentation de l'algèbre de Jordan $V_0 = V(c_r, 0)$ dans $E = V(c_r, \frac{1}{2})$ définie par

$$\phi(x_0)\xi = 2x_0\xi.$$

La forme quadratique associée à ϕ, définie sur E et à valeurs dans V_0, définie par

$$(Q(\xi)|x_0) = (\phi(x_0)\xi|\xi),$$

vaut

$$Q(\xi) = 2(\xi^2)_0.$$

La décomposition de Peirce de $e + x^2$ s'écrit

$$\begin{aligned} e + x^2 = & \ (1 + t^2 + \tfrac{1}{2}\|\xi\|^2)c_r \\ + & \ \big(\phi(x_0)\xi + t\xi\big) \\ + & \ \big(e_0 + x_0^2 + \tfrac{1}{2}Q(\xi)\big). \end{aligned}$$

En utilisant la relation

$$\Delta(x) = \Delta_0(x_0)\big(t - \frac{1}{2}(\phi(x_0^{-1})\xi|\xi)\big),$$

nous obtenons

$$\Delta(e + x^2) = \Delta_0\big(e_0 + x_0^2 + \frac{1}{2}Q(\xi)\big)\ p(t),$$

où $p(t)$ est un polynôme du second degré,

$$p(t) = at^2 + 2bt + c,$$

avec

$$a = 1 - (\phi\big((e_0 + x_0^2 + \frac{1}{2}Q(\xi))^{-1}\big)\xi|\xi).$$

Soit τ_0 l'élément du groupe triangulaire T_0 de l'algèbre V_0 associé au système d'idempotents $c_1, \ldots, c_{r-1}$, tel que

$$e_0 + x_0^2 = \tau_0 e_0.$$

Il existe une transformation linéaire $\tilde{\tau}_0$ de E vérifiant

$$Q(\tilde{\tau}_0\xi) = \tau_0 Q(\xi),\ \ \phi(\tau_0 x_0) = \tilde{\tau}_0\phi(x_0)\tilde{\tau}_0^*.$$

En posant $\xi = \tilde{\tau}_0\eta$, nous obtenons

$$e_0 + x_0^2 + \frac{1}{2}Q(\xi) = \tau_0\big(e_0 + \frac{1}{2}Q(\eta)\big),$$

et, en tenant compte du fait que $Q(\eta)$ est un élément de rang un,

$$\begin{aligned} a & = 1 - \tfrac{1}{2}(\phi\big(e_0 + \tfrac{1}{2}Q(\eta)\big)^{-1}\eta|\eta) \\ & = 1 - \tfrac{1}{2}\tfrac{\|\eta\|^2}{1+\frac{1}{2}\|\eta\|^2} \\ & = \tfrac{1}{1+\frac{1}{2}\|\eta\|^2}, \\ & = \Delta_0\big(e_0 + \tfrac{1}{2}Q(\eta)\big)^{-1}. \end{aligned}$$

On montre également que $ac - b^2 = 1$. On intègre d'abord en t en utilisant le lemme suivant.

LEMME 4. *Soit $p(t) = at^2 + 2bt + c$ un polynôme du second degré sans racines réelles, $b^2 - ac < 0$,* avec $a > 0$. Pour $\Re\alpha > \frac{1}{2}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t)^{-\alpha} dt = a^{\alpha-1}(ac - b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha} B(\alpha - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

(Voir [5], Theorem 2.1.3)

Après intégration en t nous obtenons

$$I_r(\mathbf{s}) = I_{r-1}(\mathbf{s}_0 - \frac{d}{2}) B(\mathbf{s}_r - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \int_E \Delta^0_{-\sigma}(e_0 + \frac{1}{2}Q(\eta))\, d\eta,$$

avec $\sigma_j = s_j + s_r - 1$, $1 \leq j \leq r - 1$. Pour le calcul de cette intégrale nous utilisons la proposition XIV.5.1 de [2],

$$\int_E \Delta^0_{-\sigma}(e_0 + \frac{1}{2}Q(\eta))\, d\eta = c \prod_{j=1}^{r-1} B(\sigma_j - \frac{d}{2}(r - j), \frac{d}{2}).$$

Finalement, en posant $\mathbf{s} = \lambda - \rho$, avec $\rho_j = \frac{d}{4}(2j - r - 1) + \frac{n}{2r}$, nous obtenons

$$I_r(\mathbf{s}) = c \prod_{j=1}^{r} B(\lambda_j - \frac{n}{r}, \frac{1}{2}) \prod_{j<k} B(\lambda_j + \lambda_k - \frac{2n}{r}, \frac{d}{2}).$$

Il existe une relation entre la fonction γ que nous avons considérée et la fonction c de l'espace riemannien symétrique $T_\Omega = G/K$. En effet celle-ci s'écrit

$$c(\lambda) = c_0(\lambda) c_1(\lambda),$$

où c_0 est la fonction c de l'espace riemannien symétrique G_0/K_0, et

$$c_1(\lambda) = \gamma(\lambda - \rho).$$

LITÉRATURE

1. A. DEBIARD et B. GAVEAU (1991). Représentation intégrale de certaines séries de fonctions sphériques d'un système de racines BC, *J. of Functional Analysis,* 96, 256–296.
2. J. FARAUT et A. KORANYI. *Analysis on symmetric cones*, livre à paraître.
3. C.S. HERZ (1955). Bessel functions of matrix argument, *Ann. of Math.* 61, 474-523.
4. K. HOPPE (1971). Über die spektrale Zerlegung der algebraischen Formen auf der Grassmann-Mannigfaltigkeit, *Sitzung Berichte Heidelberger Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl.*, 7, 183-238.

5. L.K. HUA (1963). *Harmonic analysis of functions of several complex variables in classical domains*, American Mathematical Society.
6. A.T. JAMES et A.G. CONSTANTINE, (1975). Generalized Jacobi polynomials as spherical functions of the Grassmann manifold, *Proc. London Mat. Soc.*, 29, 174-192.
7. M. KOECHER (1985). Die Geodätischen von Positivitätsbereichen, *Math. Ann.* 135, 192-202.
8. T.H. KOORNWINDER (1975). *Two-variable analogue of the classical orthogonal polynomials*, in Theory and application of special functions, Academic Press.
9. T.H. KOORNWINDER et I.G. SPRINKHUIZEN-KUYPER. (1978). Generalized power series expansions for a class of orthogonal polynomials in two variables, *SIAM J. Math. Anal.*, 9, 457-483.
10. M. LASALLE (1991). Polynômes de Jacobi généralisés, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 312, Série I, 425-428.
11. H. MAASS (1958). Zur theorie der Kugelfunktionen einer Matrixvariablen *Mat. Ann.* 135, 391-416.
12. E.B. VINBERG (1960). Homogeneous cones, *Soviet Math. Dokl.* 1, 787-790.